从零开始学数数

mip001

组合计数入门

July 21, 2024

目录

目录

计数原理

加法原理：做一件事有 n 类方式，$a_i\ (1 \le i \le n)$ 代表第 i 类方式的做法数目。那么完成这件事共有 $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 种不同的方法。

例子：你可以选择去三个不同的城市上学，这三个城市分别有 $1, 1, 4$ 个学校，那么你一共有 $1 + 1 + 4 = 6$ 所学校可以选择。

计数原理

加法原理：做一件事有 n 类方式，a_i $(1 \le i \le n)$ 代表第 i 类方式的做法数目。那么完成这件事共有 $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 种不同的方法。

例子：你可以选择去三个不同的城市上学，这三个城市分别有 $1, 1, 4$ 个学校，那么你一共有 $1 + 1 + 4 = 6$ 所学校可以选择。

乘法原理：做一件事需要分 n 个步骤，a_i $(1 \le i \le n)$ 代表第 i 个步骤的不同方法数目。那么完成这件事共有 $S = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ 种不同的方法。

例子：一周有三节选修课，第一节可以选 5 种课，第二节可以选 2 种课，第三节可以选 4 种课，那么一共有 $5 \times 2 \times 4 = 40$ 种选课方式。

计数原理

加法原理：做一件事有 n 类方式，$a_i\ (1 \le i \le n)$ 代表第 i 类方式的做法数目。那么完成这件事共有 $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 种不同的方法。

例子：你可以选择去三个不同的城市上学，这三个城市分别有 $1, 1, 4$ 个学校，那么你一共有 $1 + 1 + 4 = 6$ 所学校可以选择。

乘法原理：做一件事需要分 n 个步骤，$a_i\ (1 \le i \le n)$ 代表第 i 个步骤的不同方法数目。那么完成这件事共有 $S = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ 种不同的方法。

例子：一周有三节选修课，第一节可以选 5 种课，第二节可以选 2 种课，第三节可以选 4 种课，那么一共有 $5 \times 2 \times 4 = 40$ 种选课方式。

如果你觉得很简单，去看看这两道题：P5303，P8321

例题

P3197 [HNOI2008] 越狱

监狱有 n 个房间，每个房间关押一个犯人，有 m 种宗教，每个犯人会信仰其中一种。如果相邻房间的犯人的宗教相同，就可能发生越狱，求有多少种状态可能发生越狱。

$1 \le m \le 10^8$，$1 \le n \le 10^{12}$。答案对 $100,003$ 取模。

例题

P3197 [HNOI2008] 越狱

监狱有 n 个房间，每个房间关押一个犯人，有 m 种宗教，每个犯人会信仰其中一种。如果相邻房间的犯人的宗教相同，就可能发生越狱，求有多少种状态可能发生越狱。

$1 \le m \le 10^8$，$1 \le n \le 10^{12}$。答案对 $100,003$ 取模。

提示：正难则反。

例题

首先，总状态数有 m^n 种，因为每个人都可以任意选择 m 种宗教中的一种。

然后考虑所有相邻房间的犯人的宗教都不同的状态数。第一个人有 m 种选择，第二个人有 $m-1$ 种选择（为了不与第一个人重复），第三个人也有 $m-1$ 种选择（为了不与第二个人重复），以此类推可以知道有 $m \times (m-1)^{n-1}$ 种状态。

答案即为 $m^n - m \times (m-1)^{n-1}$。

例题

P8557 炼金术（Alchemy）

有 k 个不同的熔炉，每个熔炉都可以炼出 n 种金属中的任意种（可以什么都不炼出）。求有多少种情况使得每种金属至少被一个熔炉炼出。

$1 \leq n, k \leq 10^9$，答案对 998244353 取模。

例题

P8557 炼金术（Alchemy）

有 k 个不同的熔炉，每个熔炉都可以炼出 n 种金属中的任意种（可以什么都不炼出）。求有多少种情况使得每种金属至少被一个熔炉炼出。

$1 \leq n, k \leq 10^9$，答案对 998244353 取模。

提示：金属和金属之间是互不影响的，考虑换个角度。

例题

P8557 炼金术（Alchemy）

有 k 个不同的熔炉，每个熔炉都可以炼出 n 种金属中的任意种（可以什么都不炼出）。求有多少种情况使得每种金属至少被一个熔炉炼出。

$1 \le n, k \le 10^9$，答案对 998244353 取模。

提示：金属和金属之间是互不影响的，考虑换个角度。

考虑金属选熔炉。每个金属都可以选 k 个熔炉中的任意多个（不能不选），因此对于每个金属都有 $2^k - 1$ 种选法。由于金属间互不影响，答案即为 $(2^k - 1)^n$。

抽屉原理

把 $n+1$ 个物体划分为 n 组，则至少有一组有两个（或以上）的物体

等价表述：把 $m\times n+1$ 个物体分为 n 组，则至少有一组有不少于 $m+1$ 个物体

抽屉原理常被用于证明存在性证明和求最坏情况下的解，在计数题中的应用比较少。

例题：

1. CF1305C Kuroni and Impossible Calculation（传统题）
2. POJ2356 Find a multiple（传统题）
3. CF1198C Matching vs Independent Set（传统题）
4. CF1534D Lost Tree（交互题）
5. CF1450C2 Errich-Tac-Toe (Hard Version)（传统题）

目录

排列数

例题

从 n 个数中取 m 个数排成一列，问方案数。

排列数

例题

从 n 个数中取 m 个数排成一列，问方案数。

第一个数有 n 种选法，第二个数有 $n-1$ 种选法，第三个数有 $n-2$ 种选法，以此类推可知答案为 $n\times(n-1)\times(n-2)\cdots(n-m+1)$。记为：

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}=n^{\underline{m}}$$

有时候也被写为 P_n^m

组合数

例题

从 n 个数中取 m 个数，问方案数。

组合数

例题

从 n 个数中取 m 个数，问方案数。

由于每种组合都贡献了 $m!$ 种排列，所以有 $\frac{A_n^m}{m!}$ 种方案，即：

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n^{\underline{m}}}{m!}$$

有时候也被写为 C_n^m。特别地，当 $m > n$ ，$\binom{n}{m} = 0$ 。递推式：

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$$

Lucas 定理

$$\binom{n}{m} \bmod p = \binom{n \bmod p}{m \bmod p} \cdot \binom{\lfloor n/p \rfloor}{\lfloor m/p \rfloor} \bmod p$$

其中 p 为素数。

组合数的计算

1. 若 $n, m \le 2000$，对任意数取模
   - 利用递推式 $O(n^2)$ 预处理，$O(1)$ 询问。
   - 例题：P2822 [NOIP2016 提高组] 组合数问题
2. 若 $n, m \le 10^8$，对大质数取模（$p > n$）
   - $O(n)$ 预处理阶乘及其逆元，$O(1)$ 询问。
   - 如果模数小于等于 n，会出现分子分母取模后都为 0，但实际答案不是 0 的情况
3. 若模数为较小的质数（$p < n$）
   - 预处理小于 p 的情况，用 Lucas 定理 $O(\log n)$ 询问
   - 例题：P3807 【模板】卢卡斯定理/Lucas 定理

目录

组合恒等式

组合恒等式 1（二项式定理）

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

组合恒等式

组合恒等式 1（二项式定理）

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

组合意义：第 i 项就是选 i 个 a 来乘的方案数。

推论：

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = [n=0]$$

组合恒等式

组合恒等式 1（二项式定理）

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

组合意义：第 i 项就是选 i 个 a 来乘的方案数。

推论:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = [n=0]$$

考虑二项式定理 $a=1$, $b=-1$ 的情况

组合恒等式

组合恒等式 2（对称性）

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

组合恒等式

组合恒等式 2（对称性）

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

相当于从 n 个数中指定 $n-m$ 个数不选的方案数，故数值不变。

组合恒等式

组合恒等式 3（吸收恒等式）

$$\binom{n}{m} = \frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1}$$

组合恒等式

组合恒等式 3（吸收恒等式）

$$\binom{n}{m} = \frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1}$$

由组合数的定义即可推出。同理可以推出 $\binom{n}{m}$ 和 $\binom{n\pm1}{m\pm1}$ 的关系

组合恒等式

组合恒等式 4（行求和）

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

组合恒等式

组合恒等式 4（行求和）

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

证明 1：考虑二项式定理 $a=b=1$ 的情况

组合恒等式

组合恒等式 4（行求和）

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

证明 1：考虑二项式定理 $a = b = 1$ 的情况

证明 2：等价于求大小为 n 的集合中所有子集的数量，每个元素都有选与不选两种状态，所以答案为 2^n

组合恒等式

组合恒等式 5（列求和）

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{i}{n} = \sum_{i=n}^{m} \binom{i}{n} = \binom{m+1}{n+1}$$

组合恒等式

组合恒等式 5（列求和）

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{i}{n} = \sum_{i=n}^{m} \binom{i}{n} = \binom{m+1}{n+1}$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} = \binom{n+2}{n+1}$$

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} = \binom{n+3}{n+1}$$

$$\cdots$$

$$\sum_{i=n}^{m} \binom{i}{n} = \binom{m+1}{n+1}$$

组合恒等式

组合恒等式 6

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

组合恒等式

组合恒等式 6

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

由组合数的定义即可推出。

组合意义：n 个人中选 r 个队长，再在这 r 个队长中选 k 个大队长，等价于 n 个人中选 k 个大队长，再在剩下的 $n-k$ 个人中选 $r-k$ 个队长。

组合恒等式

组合恒等式 7（范德蒙德卷积）

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$$

组合恒等式

组合恒等式 7（范德蒙德卷积）

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$$

组合意义：在一个大小为 $n+m$ 的集合中取出 k 个数，可以等于把大小为 $n+m$ 的集合拆成两个集合，大小分别为 n 与 m，然后从 n 中取出 i 个数，从 m 中取出 $k-i$ 个数的方案数。由于我们有了对于 i 的枚举，于是只需要考虑一种拆法，因为不同的拆法之间是等价的。

推论（取 $n=m=k$ 的情况）：

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$$

目录

捆绑法

当有多个排列对象必须排在一起时，可以合并为一个对象处理

例题

8 个座位坐 4 对情侣，每对情侣必须坐在一起，求方案数。

捆绑法

当有多个排列对象必须排在一起时，可以合并为一个对象处理

例题

8 个座位坐 4 对情侣，每对情侣必须坐在一起，求方案数。

每对情侣有 2 种坐法，每对情侣捆绑后整体有 4! 种坐法，所以有 $4! \times 2^4 = 384$ 种。

插空法

当有多个排列对象必须分开时，可排号其它对象后再把这些对象插入。

例题

5 男 3 女坐 8 个座位，要求女生必须两两分开，求方案数。

插空法

当有多个排列对象必须分开时，可排号其它对象后再把这些对象插入。

例题

5 男 3 女坐 8 个座位，要求女生必须两两分开，求方案数。

男生单独排列有 $5!$ 种，把 3 个女生插入男生的 6 个空中，有 $3! \times \binom{6}{3}$ 种，答案即为 14400。

插板法

例 1

求 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ 的正整数解的个数。

插板法

例 1

求 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ 的正整数解的个数。

可以看成用 $n-1$ 个隔板把摆成一排的 m 个物品分成 n 段，那么问题就转化成了：在 $m-1$ 个空隙中选 $n-1$ 个空隙来插板，因此答案为：$\binom{m-1}{n-1}$

例 2

求 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ 的非负整数解的个数。

插板法

例 1

求 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 的正整数解的个数。

可以看成用 $n-1$ 个隔板把摆成一排的 m 个物品分成 n 段，那么问题就转化成了：在 $m-1$ 个空隙中选 $n-1$ 个空隙来插板，因此答案为：$\binom{m-1}{n-1}$

例 2

求 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 的非负整数解的个数。

将问题转化一下就和上面一样了：

$$(x_1+1)+(x_2+1)+\cdots+(x_n+1)=m+n$$

错排数

例题

n 封不同的信，编号分别是 $1,2,3,4,5$，现在要把这五封信放在编号 $1,2,3,4,5$ 的信封中，要求信封的编号与信的编号不一样。问有多少种不同的放置方法?

错排数

例题

n 封不同的信，编号分别是 $1,2,3,4,5$，现在要把这五封信放在编号 $1,2,3,4,5$ 的信封中，要求信封的编号与信的编号不一样。问有多少种不同的放置方法?

假设考虑到第 n 个信封，初始时暂时把第 n 封信放在第 n 个信封中，然后考虑两种情况的递推:

- 前面 $n-1$ 个信封全部装错;
- 前面 $n-1$ 个信封有一个没有装错其余全部装错。

错排数

对于第一种情况，前面 $n-1$ 个信封全部装错：因为前面 $n-1$ 个已经全部装错了，所以第 n 封只需要与前面任一一个位置交换即可，总共有 $D_{n-1} \times (n-1)$ 种情况。

对于第二种情况，前面 $n-1$ 个信封有一个没有装错其余全部装错：考虑这种情况的目的在于，若 $n-1$ 个信封中如果有一个没装错，那么把那个没装错的与 n 交换，即可得到一个全错位排列情况。

其他情况，不可能通过一次操作来把它变成一个长度为 n 的错排。

于是可得，错位排列数满足递推关系：

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

圆排列

例题

n 个人围成一圈，共有多少种排列方式。

圆排列

例题

n 个人围成一圈，共有多少种排列方式。

考虑一种排列方式，可以从不同位置断开，变成不同的排列，所以有：

$$Q_n^n \times n = A_n^n$$

因此

$$Q_n^n = (n-1)!$$

由此可得部分圆排列公式为：

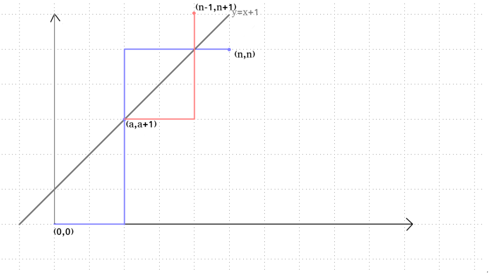
$$Q_n^r = \frac{A_n^r}{r} = \frac{n!}{r \times (n-r)!}$$

目录

卡特兰数

例题

考虑一个网格图，每次可以向右或向上走一步，在任意一个时刻，你往右走的次数都不能少于往上走的次数（即不能经过直线 $y = x + 1$），问从 $(0, 0)$ 走到 (n, n) 的方案数



卡特兰数

递归式:

$$H_n = H_0 \times H_{n-1} + H_1 \times H_{n-2} + \cdots + H_{n-1} \times H_0, (n \geq 2)$$

递推式:

$$H_n = \frac{4n-2}{n+1} H_{n-1}$$

通项公式:

$$H_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$$H_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

牢记前几项: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132$

卡特兰数

例 1

有 n 个 0，n 个 1，问有多少个长度为 $2n$ 的序列，使序列的任意一个前缀中 1 的个数都不小于 0 的个数。

卡特兰数

例 1

有 n 个 0，n 个 1，问有多少个长度为 $2n$ 的序列，使序列的任意一个前缀中 1 的个数都不小于 0 的个数。

把 1 看作向右走一格，0 看作向上走一格。

例 2

问有多少长度为 $2n$ 的合法括号序列。

卡特兰数

例 1

有 n 个 0，n 个 1，问有多少个长度为 $2n$ 的序列，使序列的任意一个前缀中 1 的个数都不小于 0 的个数。

把 1 看作向右走一格，0 看作向上走一格。

例 2

问有多少长度为 $2n$ 的合法括号序列。

要使括号序列合法，只需要让任意一个前缀中左括号的数量都不少于右括号的数量。

卡特兰数

例 3

有 n 个点，问这 n 个点能构成多少二叉树。

卡特兰数

例 3

有 n 个点，问这 n 个点能构成多少二叉树。

设 i 个点能构成 f_i 个二叉树。

一棵二叉树可以分为根节点、左子树、右子树。通过枚举左子树有多少个点可以得到:

$$f_n = f_0 \times f_{n-1} + f_1 \times f_{n-2} + \cdots + f_{n-1} \times f_0$$

与卡特兰数的递归定义一致。

除此之外还有很多题都可以转换为卡特兰数，可以自行了解。

目录

容斥原理

例题

一个班上有 10 个人喜欢数学，15 人喜欢语文，5 人同时喜欢数学和语文，问有多少人喜欢数学或语文。

容斥原理

例题

一个班上有 10 个人喜欢数学，15 人喜欢语文，5 人同时喜欢数学和语文，问有多少人喜欢数学或语文。

$$10 + 15 - 5 = 20$$

容斥原理

设 U 中元素有 n 种不同的属性，而第 i 种属性称为 P_i，拥有属性 P_i 的元素构成集合 S_i，那么

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{a_i<a_{i+1}} \left|\bigcap_{i=1}^{m} S_{a_i}\right|$$

说人话就是：

满足条件 $1 \sim n$ 的至少一个的方案数等于：

满足条件 1 的方案数 + 满足条件 2 的方案数 + ⋯⋯+ 满足条件 n 的方案数 − 同时满足 1 和 2 的方案数 − 同时满足 1 和 3 的方案数 − ⋯⋯− 同时满足 n-1 和 n 的方案数 + 同时满足 1、2 和 3 的方案数 + 同时满足 1、2 和 4 的方案数 + ⋯⋯+ 同时满足 n-2、n-1 和 n 的方案数 − ⋯⋯

目录

例 1：计数 DP

P2606 [ZJOI2010] 排列计数

求 1 到 n 的所有排列中，满足小根堆性质的排列的个数。

$n \le 10^6, m \le 10^9$

例 1：计数 DP

P2606 [ZJOI2010] 排列计数

求 1 到 n 的所有排列中，满足小根堆性质的排列的个数。

$n \le 10^6, m \le 10^9$

设 f_i 表示 i 个数组成的排列中满足小根堆性质的排列的个数。

首先根节点只能填最小的数，剩下 $i-1$ 个节点可以任意分给左右子树。那可以枚举左子树的大小 l，由于左右子树仍然需要满足小根堆的性质，所以转移方程为：

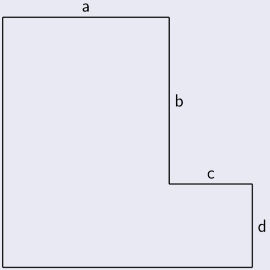
$$f_i = \binom{i-1}{l} \times f_l \times f_{i-l-1}$$

记得用 Lucas 定理，因为 n 可能大于模数。

例 2：纯推式子题

P1350 车的放置

有一个如图的 L 形棋盘，计算放 k 个互不攻击车的方案数。车互相攻击当且仅当同行或同列



例 2：纯推式子题

首先考虑再 $n \times n$ 的正方形棋盘上放 n 个车的方案数。按行考虑，第一行有 n 列可选，第二行有 $n-1$ 列可选，以此类推可知答案为 $n!$。

然后考虑 $n \times m$ 的长方形棋盘，相当于选出 k 行和 k 列，然后选出的这些会形成一个 $k \times k$ 的正方形，在这个正方形上放 k 个车。因此答案为 $\binom{n}{k} \times \binom{m}{k} \times k!$。

所以可以把棋盘从中间分为两块，上面一块为 $a \times b$ 的矩形，下面为 $(a+c) \times d$ 的矩形。枚举上半部分有 i 个车，答案即为：

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i}\binom{b}{i} i! \times \binom{a+c-i}{k-i}\binom{d}{k-i}(k-i)!$$

例 3：人类智慧题

P6057 [加油武汉] 七步洗手法

给定一个 n 点无向完全图，其中给出 m 条边是白的，剩下是黑的，求黑三角形 + 白三角形个数。

例 3：人类智慧题

P6057 [加油武汉] 七步洗手法

给定一个 n 点无向完全图，其中给出 m 条边是白的，剩下是黑的，求黑三角形 + 白三角形个数。

设黑黑黑、黑黑白、黑白白、白白白三角形各有 A, B, C, D 个，那么：

- $A + B + C + D$ 为三角形总数，即为 $\binom{n}{3}$
- 对于每一个白边，包含它的三角形有 $n - 2$ 个，因此 $B + 2C + 3D$ 为 $m(n - 2)$
- 每一对有共同顶点的白边会构成 1 个三角形，所以统计这样的白边的对数，即为 $C + 3D$。
- $A + D = (A + B + C + D) - (B + 2C + 3D) + (C + 3D)$

这道题其实有没这么智慧的做法。

习题

1. P1313 [NOIP2011 提高组] 计算系数（组合数的计算）
2. P5239 回忆京都（组合数的计算）
3. P1641 [SCOI2010] 生成字符串（卡特兰数）
4. P1450 [HAOI2008] 硬币购物（容斥原理）
5. P3773 [CTSC2017] 吉夫特（Lucas 定理）
6. P8594 「KDOI-02」一个仇的复（组合恒等式）
7. P8367 [LNOI2022] 盒（组合恒等式）
8. P4562 [JXOI2018] 游戏（隔板法）
9. P8863 「KDOI-03」构造数组（计数原理）
10. P3266 [JLOI2015] 骗我呢（卡特兰数）
11. P3813 [FJOI2017] 矩阵填数（容斥原理）
12. P5664 [CSP-S2019] Emiya 家今天的饭（容斥原理）
13. P6076 [JSOI2015] 染色问题（容斥原理）
14. P4071 [SDOI2016] 排列计数（错排数）